

О действии потенциала Рисса с однородным ядром в гранд-пространствах Лебега на полуоси

Дроботов Юрий Евгеньевич

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, ЮФУ

Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН

yu.e.drobotov@yandex.ru

К докладу на семинаре 27 января 2023 года

Теории нестандартных функциональных пространств, построенных на разнообразных обобщениях классических определений, представляют значительный интерес для современной математики как ввиду ее внутренних запросов, так и в связи с появлением большого числа прикладных дисциплин, изучающих нетривиальные функциональные зависимости. Настоящий доклад представляет частные результаты исследования потенциала Рисса в гранд-пространствах Лебега – нестандартном расширении классических L^p -пространств согласно определению

$$L_a^{p)'}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{L_a^{p)'}(\Omega)} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \right\}, \quad (1)$$

где множество Ω – произвольной, не обязательно конечной, меры. Положив $\Omega = [0, \infty)$, рассмотрим в качестве объекта изучения интегральный оператор

$$I_0^\alpha f(x) := x^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{f(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt, \quad \alpha > 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

ядро которого $k_\alpha(x, y) := x^{-\alpha} |x-y|^{\alpha-1}$ – однородно степени -1 .

Классическая теорема Харди—Литтлвуда постулирует условия

$$0 < \alpha < 1/p, \quad 1 < p < \infty, \quad q = p/(1-\alpha p)$$

как необходимые и достаточные для ограниченности операторов I_\pm^α дробного интегрирования на оси

и, как следствие тождества $I^\alpha = [2 \cos(\alpha \pi/2)]^{-1} (I_+^\alpha + I_-^\alpha)$, риссова потенциала

$$I^\alpha f(x) := \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha \pi/2)} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t) dt}{|t-x|^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots,$$

при отображении из $L^p(-\infty, \infty)$ в $L^q(-\infty, \infty)$. Задачей представляемой работы являлось доказательство необходимого и достаточного условий на функциональный параметр $a(x)$ в определении (1) – так называемый грандизатор, обеспечивающих ограниченность оператора (2) в пространствах $L_a^{p),\theta}(\Omega)$.

Получены оценки операторной нормы I_0^α , которые использованы для исследования разрешимости элементов одного параметрического семейства уравнений свертки третьего рода.