Некоторые аналитические подходы в математическом моделировании кинетики переключения сегнетоэлектриков в режиме инжекции

Дроботов Юрий Евгеньевич

yu.e.drobotov@yandex.ru

К докладу на семинаре 25 февраля 2022 года

Сегнетоэлектрики, известные также как ферроэлектрики, представляют собой класс диэлектриков со спонтанной поляризацией, дипольный момент которых может быть переориентирован посредством наведения внешнего электрического поля. Процесс переключения поляризации в таких материалах представляет собой результат образования самоподобных структур, следствием чего является самоподобное строение доменов и фрактальность электрических откликов. Математическая модель процесса переключения поляризации сегнетоэлектрика в условиях электронного облучения, учитывающая фрактальность, была предложена в [1] и затем получила развитие в работе [2], сообщившей результаты её вычислительной имплементации в рамках гибридного фрактально-стохастического подхода.

Предложенная математическая модель включает начальную задачу для уравнения динамики доменной границы сегнетоэлектрика, имеющую вид

$$\frac{d^{\alpha}u}{dt^{\alpha}} = f\left(t, u(t)\right), \quad u(t_0) = u_0, \tag{1}$$

где $u(t)$ – искомая функция расстояния, $f(\cdot)$ выражает известную правую часть уравнения, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \geq 0$. Порядок дифференциального оператора предполагается дробным: $0 < \alpha < 1$, что призвано отразить фрактальный характер движения доменной стенки. В зависимости от вида начального условия используются два определения дробной производной: Римана—Лиувилля и Капуто, связанные определёнными выражениями.

Настоящий доклад имеет целью предложить аналитические подходы к исследованию задачи (1), развиваемые в двух направлениях: применения метода естественных лакун спектральной теории операторов и приложения дробного анализа в нестандартных функциональных пространствах. Первое направление восходит к работе [3] и позволяет рассматривать уравнения с правой частью вида $\tilde{W}^n u$, $n \in \mathbb{N}$, где $\tilde{W}$ – аккретивный оператор, действующий в произвольном гильбертовом пространстве и удовлетворяющий некоторым специальным условиям. Показано, что в этом случае точное решение задачи (1) может быть записано в виде ряда, коэффициенты которого вычисляются по системе корневых векторов оператора в правой части.

Второе направление использует представление искомой функции дробным интегралом как в случае постоянного, так и переменного порядка интегрирования. Во втором случае для функциональных пространств обобщённой гёльдеровости имеет место представление [4]

$$D_{t_0+}^{\alpha(\cdot)} I_{t_0+}^{\alpha(\cdot)} \varphi(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} k(t, t-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \quad u = I_{t_0+}^{\alpha(\cdot)}\varphi,$$

что позволяет в ряде случаев рассматривать исходное уравнение как уравнение Фредгольма II-го рода, где ядро $k(\cdot)$ имеет явное выражение.

Список литературы

1. Maslovskaya A.G., Barabash T.K. *Ferroelectrics*, 2013. Vol. 442, pp. 18—26.
2. Мороз Л. И., Масловская А. Г. *Матем. моделирование*, 2019. Т. 31, №9, с. 131–144.
3. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов. *Тр. ММО*, 1962. Т. 11, 3–35
4. Vakulov, B. G.; Kochurov, E. S.; Samko, N. G. *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2011, 55:6, 20–28